Ovde su nabrojane neke osnovne formule i postupci koji se koriste pri rešavanju algoritamskih problema iz oblasti geometrije. Napredniji problemi računarske geometrije biće obrađeni u posebnim lekcijama.

**Presek intervala:**

Dati su intervali [a,b] i [c,d]. Odrediti interval koji je njigov presek (ako postoji).

- Ukoliko nismo sigurni koji je levi a koji desni kraj, najpre treba urediti krajeve datih itervala
  **if** (a>b) { tmp=a; a=b; b=tmp; }
  **if** (c>d) { tmp=c; c=d; d=tmp; }

- Ako presek postoji, njegov levi kraj je veći od brojeva {a, c}, a desni kraj je manji od brojeva {b, d}
  **if** (a < c) x=c;
  **else** x=a;
  **if** (b < d) y=b;
  **else** y=d;
  **if** (x ≤ y) **return** {true, x, y};
  **else return** false;

**Presek (poravnatih) pravougaonika:**

Poravnate pravougaonike ćemo definisati kao pravougaonike kod kojih su stranice paralelne koordinatnim osama. Poravnati pravougaonik ćemo kratko zvati boks. Boks se može zadati koordinatama temena jedne svoje dijagonale. Na primer, ako su date koordinate Px, Py, Qx, Qy temena dijagonale PQ, tada su temena pravougaonika (Px,Py), (Px,Qy), (Qx,Qy), (Qx,Py).

Zadatak: dati su boksovi ABCD i EFGH koordinatama temena po jedne svoje diajgonale, dakle brojevima: bx, by, dx, dy, fx, fy, hx, hy. Odrediti boks koji je presek datih boksova (ako postoji).

Napomena: kako ništa nije rečeno o redosledu označavanja temena boksa, ne možemo se osloniti na neki određeni redosled, nego treba urediti koordinate po jednoj i drugoj osi (zasebno). Na dalje se zadatak svodi na dvostruku primenu prethodnog zadatka (presek intervala).

**Zadavanje prave**

U školi se prava najčešće zadaje jednačinom oblika y=ax+b. Mana ovog načina zadavanja je što se prava paralelna sa y osom ne može zadati ovakvom jednačinom. Potreban je oblik koji obuhvata sve slučajeve.

Neka je prava p zadata dvema svojim (različitim) tačkama A(ax, ay) i B(bx, by) i neka je M(x,y) proizvoljna tačka u ravni. Potreban i dovoljan uslov koji treba da ispuni tačka M da bi pripadala pravoj p predstavlja jednačinu prave. Taj uslov se može zapisati vektorski:

$$M = A + t\,\overrightarrow{AB} \quad \text{ili} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB},$$ gde je O koordinatni početak,

ili po koordinatama:

x = ax + t*(bx-ax),
y = ay + t*(by-ay).

Ovo je parametarsko zadavanje prave. Primetimo da za vrednost parametra t=0 dobijamo tačku A, a za vrednost t=1 dobijamo tačku B. Lako se možemo uveriti da ograničavanjem vrednosti parametra t možemo zadati sledeće delove prave:

| skup vrednosti parametra *t* | deo prave |
|---|---|
| $t \in (-\infty, \infty)$ | cela prava p |
| t=0 | tačka A |
| t=1 | tačka B |
| $t \in [0,1]$ | duž AB |
| $t \in [0, \infty)$ | poluprava sa početkom u A, koja sadrži B |
| $t \in (-\infty, 0]$ | poluprava sa početkom u A, koja ne sadrži B |
| $t \in [1, \infty)$ | poluprava sa početkom u B, koja ne sadrži A |
| $t \in (-\infty, 1]$ | poluprava sa početkom u B, koja sadrži A |

Zadavanje prave i njenih delova u prostoru je praktično isto, osim što tačke imaju po tri koordinate. Neka su sada tačke A i B zadate kao A(ax, ay, az), B(bx, by, bz). Vektorska jednačina prave je potpuno ista kao u slučaju ravni, dok jednačine po koordinatama glase:

x = ax + t*(bx-ax),
y = ay + t*(by-ay),
z = az + t*(bz-az).

Primer: Date su duži AB i CD koordinatama svojih tačaka u ravni. Odrediti da li ove duži imaju zajedničkih tačaka, i ako imaju, odretiti koordinate jedne zajedničke tačke.

Rešenje: problem se svodi na određivanje brojeva $t_1$ i $t_2$ (ako postoje), takvih da važi:

ax + $t_1$*(bx-ax) = cx + $t_2$*(dx-cx)
ay + $t_1$*(by-ay) = cy + $t_2$*(dy-cy)
$0 \le t_1 \le 1$
$0 \le t_2 \le 1$

a to je rešavanje sistema linearnih jednačina sa dve nepoznate ($t_1$ i $t_2$), koje se uči u okviru matematike za osnovnu školu.

**Zadavanje kruga**

Potreba i dovoljan uslov da tačka (x, y) pripada krugu je da je njeno rastojanje od centra kruga ($x_0$, $y_0$) jednako R. Drugim rečima, treba da važi:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

**Presek prave i kruga**

Neka je protrebno odrediti tačku koaj pripada istovremeno datoj pravoj i datom krugu. Neka je prava zadata parametarski

x = ax + t*(bx-ax),
y = ay + t*(by-ay).

A krug jednačinom

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

Kombinovanjem dobijamo

$$(\mathrm{ax}\ +\ \mathrm{t}*(\mathrm{bx}-\mathrm{ax})-x_0)^2+(\mathrm{ay}\ +\ \mathrm{t}*(\mathrm{by}-\mathrm{ay})-y_0)^2=R^2$$

Ovde su sve veličine osim $t$ dati koeficijenti, pa smo ovim dobili kvadratnu jednačinu po $t$. Posle deliomičnog sređivanja, isti uslov glasi:

$$\begin{gathered}((\mathrm{bx}-\mathrm{ax})^2+(\mathrm{by}-\mathrm{ay})^2)\cdot t^2\\ +2\big((bx-ax)\cdot(ax-x_0)+(by-ay)\cdot(ay-y_0)\big)\cdot t\\ +(\mathrm{ax}\ -x_0)^2+(\mathrm{ay}\ -y_0)^2-R^2=0\end{gathered}$$

Odnosno $A\cdot t^2+B\cdot t+C=0$, pri čemu smo uveli nove oznake (nove promenljive u programu)

$A=((\mathrm{bx}-\mathrm{ax})^2+(\mathrm{by}-\mathrm{ay})^2)$,
B=$2\big((bx-ax)\cdot(ax-x_0)+(by-ay)\cdot(ay-y_0)\big)$,
$C=(\mathrm{ax}\ -x_0)^2+(\mathrm{ay}\ -y_0)^2-R^2$

Rešavanjem ove kvadratne jednačine mogu se dobiti 0, 1 ili 2 rešenja po $t$, što redom odgovara slučajevima kada prava ima 0, 1 ili 2 zajedničke tačke sa krugom.

Zadatak se može slično rešavati I kada je prava zadata jednačinom, samo se dobija kvadratna jednačina po jednoj od koordinata (*x* ili *y*) umesto po *t*.

**Uslov paralelnosti pravih u ravni i prostoru**

Neka je prava $p_1$ data tačkama $A_1$i $B_1$ a prava $p_2$ tačkama $A_2$i $B_2$. Da bi prave $p_1$ i $p_2$ bile paralelne, potrebno je i dovoljno da vektori nosači ovih pravih (u ovom slučaju $\overrightarrow{A_1B_1}$ i $\overrightarrow{A_2B_2}$) budu kolinearni: $t_1\overrightarrow{A_1B_1}+t_2\overrightarrow{A_2B_2}=\vec{0}$, pri čemu bar jedan od koeficijenta $t_1,t_2$ nije nula. Kako ni jedan od vektora nosača pravih nije nula vektor, možemo zahtevati da oba koeficijenta budu različita od nule. Time se uslov svodi na $\overrightarrow{A_1B_1}=t\,\overrightarrow{A_2B_2}$ ili

$$bx_1-ax_1=t(bx_2-ax_2),$$

$$by_1-ay_1=t(by_2-ay_2)$$

odakle eliminisanjem parametra $t=-\frac{t_2}{t_1}$ dobijamo

$$(bx_2-ax_2)\,(by_1-ay_1)=(bx_1-ax_1)(by_2-ay_2).$$

Napomenimo da je bolje ovaj uslov pisati pomoću proizvoda (kao što je učinjeno), jer bismo u slučaju deljenja morali da vodimo računa i o slučaju kada je delilac jednak nuli.

Za prave u prostoru vektorski oblik je identičan, $\overrightarrow{A_1B_1}=t\,\overrightarrow{A_2B_2}$, a uslova po koordinatama ima za jedan više:

$$bx_1 - ax_1 = t(bx_2 - ax_2),$$

$$by_1 - ay_1 = t(by_2 - ay_2),$$

$$bz_1 - az_1 = t(bz_2 - az_2)$$

Eliminisanjem parametra, sada se dobijaju dve jednačine:

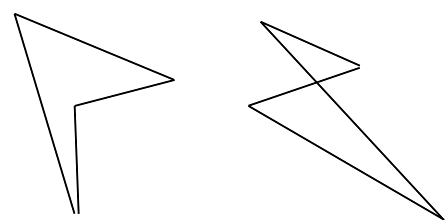
$$(bx_2 - ax_2)\,(by_1 - ay_1) = (bx_1 - ax_1)(by_2 - ay_2).$$

$$(bx_2 - ax_2)\,(bz_1 - az_1) = (bx_1 - ax_1)(bz_2 - az_2).$$

Ove jednačine predstavljaju uslove da projekcije vektora nosača na ravni *Oxy* i *Oxz* (istim redom) budu paralelne. Da jedan uslov nije dovoljan lako je potvrditi koristeći ove projekcije.

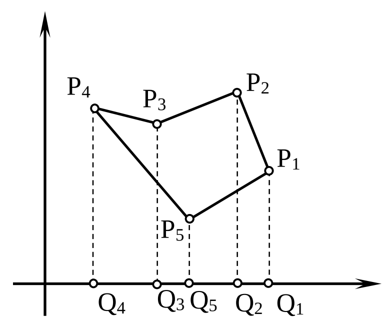
**Površina prostog mnogougla**

Mnogougao je prost ako nema samopreseka. Na slici desno, prvi mnogougao je prost (iakoje nekonveksan), a drugi nije prost.



Ovde će biti opisano kako se može izračunati površina prostog mnogougla P ako su data nejgova temena u redosledu obilaska poligonalne linije.

Neka su temena mnogougla redom tačke $P_1, P_2, ..., P_n$. Radi jednobraznog razmatranja svih tačaka, uvešćemo i tačku $P_{n+1} \equiv P_1$ i pretpostavićemo da su sve tačke u prvom kvadrantu.




Uočimo sada pravougli trapez $P_kP_{k+1}Q_{k+1}Q_k$, gde su $P_k$, $P_{k+1}$ dva uzastopna temena mnogougla, a $Q_k$, $Q_{k+1}$, njihove projekcije na $x$ osu. Visina tog trapeza je po apsolutnoj vrednosti jednaka $(x_k - x_{k+1})$, a srednja linija $(y_k + y_{k+1}) / 2$. Prema tome, proizvod $P_k$ ove dve veličine je po apsolutnoj vrednosti jednak površini k-tog trapeza:

$$P_k = (x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1}) / 2$$

Sabiranjem i oduzimanjem ovakvih izraza za sve $k$ možemo dobiti površinu mnogougla. Obilaskom temena u pozitivniom smeru (suprotno kretanju kazaljke na satu) dobijamo da se oduzimaju površine trapeza koji su van mnogougla (na slici četvrti i peti) od onih koji sadrže mnogougao (prva tri). U slučaju obilaska u negativnom smeru, svi znaci su suprotni. Tako dobijamo da izraz

$$P = \frac{1}{2} abs \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1})$$

(zahvaljujući apsolutnoj vrednosti) predstavlja površinu mnogougla, bez obzira na orijentaciju mnogougla (smer u kome su zadata temena). Znak ove sume nam upravo govori da li su temena navedena u pozitivnom ili negativnom smeru. Primetimo još da se izraz za površinu može napisati i kao

$$P = \frac{1}{2} abs\left( \sum_{k=1}^{N} x_k y_k + \sum_{k=1}^{N} x_k y_{k+1} - \sum_{k=1}^{N} x_{k+1} y_k - \sum_{k=1}^{N} x_{k+1} y_{k+1} \right)$$
$$= \frac{1}{2} abs\left( \sum_{k=1}^{N} x_k y_{k+1} - \sum_{k=1}^{N} x_{k+1} y_k \right) = \frac{1}{2} abs \sum_{k=1}^{N} \left( x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k \right)$$

jer se tačka $P_{n+1}$ poklapa sa tačkom $P_1$, pa je i $\sum_{k=1}^{N} x_k y_k = \sum_{k=1}^{N} x_{k+1} y_{k+1}$

Nije teško uveriti se da položaj koordinatnih osa ne utiče na izgled izvedene formule za površinu. Na primer, ako bi se sve *y* koordinate smanjile za istu vrednost *h*, imali bismo:

$$\frac{1}{2} abs \sum_{k=1}^{N} \left( x_k \left( y_{k+1} - h \right) - x_{k+1} \left( y_k - h \right) \right) =$$
$$\frac{1}{2} abs \left( \sum_{k=1}^{N} \left( x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k \right) + h \sum_{k=1}^{N} \left( x_{k+1} - x_k \right) \right) =$$
$$\frac{1}{2} abs \sum_{k=1}^{N} \left( x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k \right)$$

Slično se dobija i pomeranjem *y* ose, tj. promenom svih *x* koordinata. Prema tome, dobijena formula važi za sve proste poligone.

**Zaokret**

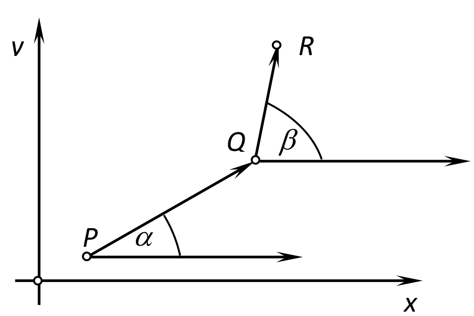
Date su tri nekolinearne tačke *P*, *Q* i *R* svojim koordinatama. Odrediti da li, krećući se po izlomljenoj liniji *PQR* vršimo zaokret nalevo ili nadesno.

Rešenje:

Da bi se razumelo izvođenje formule u ovom zadatku, potrebno je osnovno znanje trigonometrije (znak sinusne funkcije i adiciona formula za sinus razlike uglova). Ukoliko niste učili trigonometriju, možete preskočiti izvođenje i koristiti formulu kao gotov rezultat.

Označimo redom sa $\alpha$ i $\beta$ uglove koje vektori $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QR}$ grade sa pozitivnim smerom *x* ose, kao na slici. Da bi zaokret bio na levo, potrebno je i dovoljno da bude ispunjen uslov

$$sin(\beta-\alpha) > 0.$$




Ako sa *Px*, *Py*, *Qx*, *Qy*, *Rx*, *Ry* označimo redom koordinate tačaka *P*, *Q*, *R*, a sa *a* i *b* dužine vektora $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QR}$, tada je:

*sin*(β-α) = *cos* α *sin* β - *cos* β *sin* α = (*Qx* - *Px*) (*Ry* - *Qy*)/*ab* - (*Rx* - *Qx*) (*Qy* - *Py*) /*ab*

Kako su *a* i *b* uvek pozitivne veličine, množenje poslednjeg izraza sa *ab* ne utiče na njegov znak.

Uvedimo sledeću funkciju:

*Zaokret*(*P*, *Q*, *R*) = (*Qx* - *Px*) (*Ry* - *Qy*) - (*Rx* - *Qx*) (*Qy* - *Py*)

Prema prethodnom, na osnovu znaka rezultata funkcije *Zaokret* možemo ustanoviti da li je zaokret na levo ili na desno. Konkretno, ako je rezultat pozitivan, zaokret je na levo, a ako je negativan – na desno.

**Kolinearnost tačaka**

Vrednost funkcije *Zeokret* jednaka nuli odgovara kolinearnim tačkama, pa ovu funkciju možemo koristiti i za proveru kolinearnosti.

Do formule za proveru kolinearnosti se može doći i na drugi način, na primer polazeći od jednačine prave PQ. R pripada toj pravoj ako i samo ako je vektor $\overrightarrow{PR}$ kolinearan sa $\overrightarrow{PQ}$, tj. akko postoji t za koje je

Rx = Px + t*(Qx-Px),        Ry = Py + t*(Qy-Py)

Ukoliko takvo t postoji, ono se može izračunati iz bar jedne od formula

$t = \frac{Rx-Px}{Qx-Px}$ ili $t = \frac{Ry-Py}{Qy-Py}$

(u slučaju prave paralelne jednoj od koordinatnih osa, ne mogu se koristiti obe formule). Iz rečenog sledi da je uslov za kolinearnost tačaka P, Q i R ista jednakost koja je dobijena i pristupom zaokreta (izračunavanjem parametra *t* iz jedne, a zatim uvrštavanjem u drugu jednaksot):

$$(Rx - Px) \cdot (Qy - Py) = (Ry - Py) \cdot (Qx - Px)$$

I ovde je bitno da se pri proveri izbegne deljenje, jer bi imenilac mogao biti jednak nuli, a to to bi postupak provere učinilo komplikovanijim, sporijim i podložnijim grešci.

Koristeći uslov kolinearnosti vektora u prostoru, lako se dobija uslov kolinearnosti tačaka u prostoru (sastoji se iz dve jednačine).

**Skalarni proizvod vektora i ugao između vektora**

Dati su vektori $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ tačkama $A(A_x, A_y)$ i $B(B_x,\ B_y)$. Tačka O je koordinatni početak. Ponekad je potrebno izračunati konveksan ugao koji zaklapaju ovi vektori. Za rešavanje ovog zadatka dovoljno je znati nekoliko formula iz analitičke geometrije:

Dužina vektora $\vec{a}$ : $\|\vec{a}\| = a = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$

Dužina vektora $\vec{b}$ : $\|\vec{b}\| = b = \sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2}$

Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$: $\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = \ a \cdot b \cdot cos(\vec{a},\ \vec{b})$

gde je $cos(\vec{a},\ \vec{b})$ kosinus ugla između vektora $\vec{a},\ \vec{b}$. Odavde se lako dobija:

$$cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle}{a \cdot b} = \frac{A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}\sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2}}$$

Za vektore u prostoru, ako su tačke $A(A_x, A_y, A_z)$ i $B(B_x,\ B_y,\ B_z)$, uslov je vrlo sličan:

$$cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle}{a \cdot b} = \frac{A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}\sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}}$$

**Funkcija atan2**

U skoro svim programskim jezicima koji su danas u upotrebi, postoji gotova funkcija za određivanje ugla koji dati vektor (x,y) zaklapa sa pozitivnim smerom x ose. Ta funkcija se zove atan2 i može se definisati pomoću matematičke funkcije arkus tangens (arctan) na sledeći način:

$$atan2(y,x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & y < 0, x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0, x = 0 \\ nije\ definisana & y = 0, x = 0 \end{cases}$$

Funkcija atan2 kao rezultat daje vrednosti iz intervala (-π, π].

**Uslov normalnosti pravih u ravni i prostoru**

Normalnost u opštijem smislu ne zahteva da se prave seku. Drugim rečima, za mimoilazne prave se razmatra ugao koji bip rave gradile kada bi se paralelno pomerile do preseka (taj ugao ne zavisi od načina pomeranja), i ako je taj ugao prav, takve prave takođe možemo smatrati međusobno normalnim. Ukoliko je potrebno proveriti normalnost koja podrazumeva i presek, uslov postojanja preseka može se nezavisno dodati.

Ugao između dva vektora je prav, kada je kosinus tog ugla jednak 0, što se svodi na:

$$A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = 0$$

za vektore u ravni, odnosno

$$A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z = 0$$

za vektore u prostoru.

Za prave u ravni, koje se mogu zadati u obliku $y = kx + n$, znajući da je $k_a = \frac{A_y}{A_x}$, iz date formule lako se dobija nešto poznatiji uslov: $k_a \cdot k_b = -1$. Mana ovako datog uslova je da se na prave paralalne koordinatnim osama ne može primeniti, a i teže ga je uopštiti na slučaj pravih u prostoru.